Funkcje wektorowe

Anna Bahyrycz

Definicja 1

Niech $D \subset \mathbb{R}^m$ *i* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *dla* $i = 1, \ldots, k$. *Funkcją wektorową* m *zmiennych nazywamy odwzorowanie* $f : D \to \mathbb{R}^k$ *określone następująco:*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_m)\big).$$

Niech x_0 *należy do zbioru* D *wraz z pewnym otoczeniem. Jeżeli istnieją*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \ j \in \{1, \ldots, m\},$$

to pochodna funkcji f *w* x_0 *jest określona macierzą:*

$$\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x_0) \end{bmatrix}$$

zwaną macierzą Jacobiego funkcji f *w* x_0.
Mówimy, że funkcja wektorowa f *jest klasy* C^1 *jeżeli wszystkie funkcje* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, *gdzie* $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ *są funkcjami ciągłymi.*

Definicja 2

Niech Ω *będzie podzbiorem otwartym przestrzeni* $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *będzie funkcją wektorową,* $x_0 \in \Omega$ *oraz macierz kwadratowa*

$$\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

będzie macierzą Jacobiego funkcji f *w punkcie* x_0. *Wówczas jakobianem odwzorowania* f *w punkcie* x_0 *nazywamy wyznacznik (kwadratowej) macierzy Jacobiego funkcji* f *w punkcie* x_0 *i oznaczamy* $|\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x_0)|$.
Mówimy, że odwzorowanie f *jest nieosobliwe gdy* $|\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x)| \neq 0$ *dla każdego* $x \in \Omega$.

Przykład 1

Wyznaczyć macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania biegunowego $B : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ *wzorem*

$$B(\rho, \varphi) = \big(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)\big) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Wyznaczamy macierz Jacobiego odwzorowania B

$$\mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{bmatrix}$$

a następnie jakobian B

$$|\mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho, \varphi)| = \det \mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

$\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$

Twierdzenie 1 (o macierzy Jacobiego funkcji odwrotnej)

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ będzie nieosobliwym odwzorowaniem klasy C^1. Wówczas

1. *zbiór $f(\Omega)$ jest otwarty;*
2. *jeśli f jest różnowartościowe, to f^{-1} jest klasy C^1 oraz*

$$J_{f^{-1}}(y)=(J_f(x))^{-1},$$

gdzie $y=f(x),\ x\in\Omega$.

Przykład 2

Dla odwzorowania biegunowego $B:\mathbb{R}_+\times(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ określonego wzorem

$$B(\rho,\varphi)=\big(x(\rho,\varphi),y(\rho,\varphi)\big)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

sprawdzić, że zachodzi wzór

$$J_{B^{-1}}(x,y)=(J_B(\rho,\varphi))^{-1},$$

gdzie $(x,y)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $(\rho,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times(0,\frac{\pi}{2})$.

Pole wektorowe

Definicja 3

Polem wektorowym nazywamy funkcję, która każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkowuje pewien wektor.

Definicja 4

Polem wektorowym na obszarze $D\subset\mathbb{R}^2$ (na płaszczyźnie) nazywamy funkcję wektorową

$$\mathbf{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big),\quad (x,y)\in D.$$

Polem wektorowym na obszarze $V\subset\mathbb{R}^3$ (w przestrzeni) nazywamy funkcję wektorową

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big),\quad (x,y,z)\in V.$$

Przykład 2 c.d.

Zaczniemy od policzenia $(J_B(\rho,\varphi))^{-1}$. Z Przykładu 1 mamy

$$\mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho,\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{bmatrix},$$

a stąd ponieważ $\det\mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho,\varphi)=\rho$ otrzymujemy, że

$$(\mathbf{J}_{\mathrm{B}}(\rho,\varphi))^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho}\end{bmatrix}.$$

Ponieważ $B^{-1}(x,y)=\big(\sqrt{x^2+y^2},\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\big)$ dla $(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ (zobacz wykład "Współrzędne biegunowe ..."), więc

$$J_{B^{-1}}(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix};\quad J_{B^{-1}}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\begin{bmatrix}\frac{\rho\cos\varphi}{\rho} & \frac{\rho\sin\varphi}{\rho}\\ -\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2} & \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\end{bmatrix},$$

zatem zachodzi sprawdzany wzór.

Definicja 5

Pole wektorowe nazywamy potencjalnym na obszarze D położonym na płaszczyźnie lub w przestrzeni, gdy istnieje funkcja $U:D\to\mathbb{R}$ taka, że

$$\mathbf{F}=\mathbf{grad}\,U.$$

Funkcję U nazywamy potencjałem pola wektorowego $\mathbf{F}$.

Uwaga 1

Dla pola wektorowego na płaszczyźnie $\mathbf{F}=(P,Q)$ powyższy warunek przyjmuje postać

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial U}{\partial y},$$

a dla pola wektorowego w przestrzeni $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ przyjmuje postać

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Twierdzenie 2

Niech pole wektorowe $\mathbf{F} = (P, Q)$ *będzie różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze wypukłym* $D \subset \mathbb{R}^2$*. Wówczas pole wektorowe* $\mathbf{F}$ *jest potencjalne na* D *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \text{dla każdego } (x,y) \in D.$$

Podobnie niech pole wektorowe $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *będzie różniczkowalne w sposób ciągły na obszarze wypukłym* $V \subset \mathbb{R}^3$*. Wówczas pole wektorowe* $\mathbf{F}$ *jest potencjalne na* V *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \qquad \text{dla każdego } (x,y,z) \in V. \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) \end{cases}$$

Przykład 4

Sprawdzić, które z podanych pól wektorowych są potencjalne. Wyznaczyć potencjały pól wektorowych, które są potencjalne.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (3y^2, 6xy)$ *gdzie* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

Pole wektorowe $\mathbf{F} = (P, Q)$ *jest różniczkowalne w sposób ciągły i równe są pochodne*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 6y \quad i \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6y \quad \text{dla każdego } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

więc pole $\mathbf{F}$ *jest potencjalne. Wyznaczamy potencjał pola* $\mathbf{F}$*, czyli funkcję* $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *taką, że*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 3y^2 \quad i \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 6xy.$$

$$U(x,y) = \int 3y^2\, dx = 3y^2x + g_1(y) \quad i \quad U(x,y) = \int 6xy\, dy = 3xy^2 + g_2(x),$$

stąd potencjał pola $\mathbf{F}$ *dany jest wzorem*

$$U(x,y) = 3xy^2 + C, \ \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Przykład 3

Sprawdzić czy podane funkcje są potencjałami wskazanych pól wektorowych:

1. $U(x,y) = x^2 + y^2 + 10$; $\mathbf{F}(x,y) = (2x, 2y)$ *gdzie* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $U(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$; $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + yz, 2y + xz, 2z + xy)$ *gdzie* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Przykład 2 c.d.

Sprawdzić, które z podanych pól wektorowych są potencjalne. Wyznaczyć potencjały pól wektorowych, które są potencjalne.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y + z, x + z, x - z)$ gdzie $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pole wektorowe $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ jest różniczkowalne w sposób ciągły. Sprawdzamy czy spełnione są warunki:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)$$

$$1 = 1 \qquad\qquad 1 = 1 \qquad\qquad -1 \neq 0$$

więc pole $\mathbf{F}$ nie jest potencjalne.

Przykład 2 c.d.

Sprawdzić, które z podanych pól wektorowych są potencjalne. Wyznaczyć potencjały pól wektorowych, które są potencjalne.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$ gdzie $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pole wektorowe $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ jest różniczkowalne w sposób ciągły. Sprawdzamy czy spełnione są warunki:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)$$

$$-2y = -2y \qquad -2x = -2x \qquad 2y = 2y$$

więc pole $\mathbf{F}$ jest potencjalne. Wyznaczamy potencjał pola $\mathbf{F}$, czyli funkcję $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = -y^2 - 2xz, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = 2yz - 2xy \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = y^2 - x^2.$$

$U(x,y,z) = \int(-y^2 - 2xz)\,dx = -y^2x - x^2z + g_1(y,z)$,
$U(x,y,z) = \int(2yz - 2xy)\,dy = y^2z - y^2x + g_2(x,z)$,
$U(x,y,z) = \int(y^2 - x^2)\,dz = y^2z - x^2z + g_3(x,y)$,
stąd potencjał pola $\mathbf{F}$ dany jest wzorem

$$U(x,y,z) = -xy^2 - x^2z + y^2z + C, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Definicja 7

Niech $\mathbf{F} = (P,Q,R)$ będzie różniczkowalnym polem wektorowym na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$. Dywergencję pola wektorowego $\mathbf{F}$ określamy wzorem:

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \circ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Rotację pola wektorowego $\mathbf{F}$ określamy wzorem:

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Przykład 6

Wyznaczyć dywergencję i rotację pola wektorowego

$$\mathbf{F} = (x^3y, 2yz^2, xz).$$

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = 3x^2y + 2z^2 + x, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{F} = (-4yz, -z, -x^3)$$

Definicja 6

Operator Hamiltona (nabla) określamy wzorem:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Uwaga 2

Używając nabli gradient funkcji trzech zmiennych f można zapisać w postaci

$$\mathbf{grad}\, f = \nabla f$$

. Nablę można uogólnić na przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Przykład 5

Wyznaczyć gradient funkcji

$$f(x,y,z) = \mathrm{arctg}\frac{y}{z}.$$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = \left(0, \frac{z}{y^2+z^2}, -\frac{y}{y^2+z^2}\right)$$

Uwaga 3

Pole wektorowe $\mathbf{F}$ nazywamy bezwirowym na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$, jeżeli $\mathrm{rot}\mathbf{F} = (0,0,0)$ w każdym punkcie V. Warunek $\mathrm{rot}\mathbf{F} = (0,0,0)$ jest równoważny potencjalności pola wektorowego $\mathbf{F}$.
Pole wektorowe $\mathbf{F}$ nazywamy bezźródłowym na obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$, jeżeli $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ w każdym punkcie V.

Definicja 8

Operator Laplace'a (laplasjan) określamy wzorem:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Uwaga 4

Laplasjan funkcji f mającej drugie pochodne cząstkowe ciągłe nazywamy funkcję

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \circ \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Przykład 7

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia $\frac{\operatorname{arctg} 0{,}9}{\sqrt{4{,}02}}$.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y), \qquad \textit{czyli}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{y}}, \quad (x_0, y_0) = (1,4), \quad \Delta x = -0,1 \quad \textit{i} \quad \Delta y = 0,02$$

$$f(1,4) = \frac{\operatorname{arctg} 1}{\sqrt{4}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2y\sqrt{y}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi}{64};$$

$$\frac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}} \approx \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot (-0,1) + \left(-\frac{\pi}{64}\right) \cdot 0,02 = 0,3811$$

$$\frac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}} = 0,3654 \ \textit{z dokładnością do 4 miejsca po przecinku}$$

Definicja 9 (Różniczka funkcji)

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych $\Delta x, \Delta y$ określoną wzorem

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Twierdzenie 3 (Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Wówczas

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

przy czym błąd $\delta(\Delta x, \Delta y)$ powyższego przybliżenia dąży szybciej do 0 niż wyrażenie $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.